SKN TRiADA
UNIWERSYTET ŁÓDZKI
Wydział Matematyki i Informatyki

Konkurs z zastosowań matematyki - finanse, logistyka, ubezpieczenia

Łódź, 2009

1 Prawdopodobieństwo klasyczne

Rachunek prawdopodobieństwa ma na celu opisanie za pomocą ścisłych matematycznych narzędzi pewnych zjawisk, które nie wykazują charakterystycznych prawidłowości. Najczęściej przywoływanymi przekładami zastosowania metod probabilistycznych są gry hazardowe. Obecnie, niezwykle dynamicznie rozwijający się rynek instrumentów finansowych oraz kontraktów ubezpieczeniowych znacząco wpłynął na kierunek rozwoju nowoczesnej probabilistyki. Poniżej przedstawimy pewne podstawowe koncepcje związane z probabilistyczną analizą kontraktów terminowych. Będziemy się w miarę naszych możliwości odwoływać do intuicji czytelnika bacząc aby nie wprowadzać niepotrzebnych formalizmów. Posłużymy się następującym przykładem

Przykład 1 *Weźmy pod uwagę pewien instrument finansowy, który wypłaca ustaloną ilość pieniędzy Z w przypadku zajścia pewnych okoliczności oraz inną ilość jednostek pieniężnych P w przeciwnym przypadku. Załóżmy ponadto, że mamy pewną informację na temat szansy z jaką zajść mogą owe okoliczności. Naszą wiedzę reprezentować będziemy za pomocą prawdopodobieństwa z jakim w przyszłości możemy otrzymać Z jednostek pieniężnych z rozważanego instrumentu finansowego, oznaczmy to prawdopodobieństwo przez p_z. Oczywiście zgodnie z naszą intuicją szansa, że otrzymamy P jednostek pieniężnych wynosi $1-p_z$. Dla ustalenia uwagi będziemy posługiwać się następującym schematem: Sprzedający instrument finansowy rzuca kością sześcienną i jeśli wypadną dwa lub trzy oczka to wypłaca Z jednostek zaś w przeciwnym przypadku wypłaca P jednostek wówczas $p_z = 1/3$. Zastanówmy się jaką cenę możemy zapłacić za ten instrument posiadając taką wiedzę. Naturalnie przeprowadzamy następujące rozumowanie: zgodnie z naszym przekonaniem możemy (pewnym sensie średnio) otrzymać*

$$p_z\cdot Z + (1-p_z)\cdot P := C$$

jednostek pieniężnych. Zatem skłonni jesteśmy za ten instrument zapłacić $C_1 \leq C$. Patrząc ze strony sprzedającego, który chce na tej transakcji zarobić, jest on skłonny ten instrument sprzedać za $C \leq C_2$ jednostek pieniężnych. Zauważmy zatem, że z punktu widzenie zarówno kupującego jak i sprzedającego C jednostek pieniężnych jest uczciwą cena rozważanego instrumentu.

Postarajmy się sformalizować powyższe rozumowanie. W tym celu wprowadźmy następujące definicje.

Definicja 1 *Niech będzie dany pewien niepusty zbiór Ω powiemy, że zbiór ten jest przeliczlny jeśli istnieje pwena funkcja odwzorowująca wazjemnie jednoznacznie zbiór Ω na pewien podzbiór zbioru liczb naturalnych. Inaczej rzecz* *ujmując zbiór przeliczlny jest to taki zbiór, którego wszystkie elementy możemy ustawić w ciąg- skończony lub nie.*

Definicja 2 *Niech będzie dany pewien niepusty przeliczalny zbiór Ω oznaczmy przez 2^{Ω} rodzinę jego podzbiorów, wówczas funkcję $P : 2^{\Omega} \to [0,1]$ spełniającą następujące warunki:*

1. $P(\Omega) = 1$
2. $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ...$
   , gdzie $A_i \cap A_j = 0 \quad$ *dla* $i \neq j$

Zbiór Ω nazywamy zbiorem zdarzeń elementarnych zaś elementy rodziny jego podzbiorów nazywamy zdarzeniami.

Intuicyjnie rzecz ujmując zdarzenia elementarne to najmniejsze "klocki" z jakich budujemy nasz model (w powyższym przykładzie będzie to wynik pojedynczego rzutu kością) a zdarzenia to obiekty z tych "klocków" zbudowane (w naszym przykładzie to będą dwie wykluczające się okoliczności: pierwsza- na kostce wypadną dwa lub trzy oczka oraz druga- na kostce wypadnie jedno, cztery, pięć lub sześć oczek). Zauważmy, że w naszym modelu wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne a zatem mamy

$$p_z = \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6} = P(\{2\}) + P(\{3\})$$

oraz

$$1 - p_z = \frac{2}{3} = 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) = P(\{1\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\})$$

, uogólniając powyższe w przypadku kiedy wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne posłużyć możemy się następującym schematem liczenie prawdopodobieństwa: Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia jest iloczynem prawdopodobieństwa zdarzenia elementarnego oraz ilości zdarzeń elementarnych wchodzących w skład danego zdarzenia. Zauważmy pewną jakościową zmianę rozumowania jakiej dokonaliśmy w rozważanym przykładzie. Niepewność w modelu opisana byla przez rzut kością zaś z tym rzutem powiązaliśmy wypłatę z instrumentu finansowego w następujący sposób: $\{1,2,3,4,5,6\} \to^{X} \{Z, P\}, f(2) = f(3) = Z, f(1) = f(4) = f(5) = f(6) = P$ oczywiste jest więc, że funkcja X przyjmuje dwie wartości P oraz Z, ponadto prawdopodobieństwo, że funkcja X przyjmie wartość Z jest równe prawdopodobieństwu, że wypadną dwa lub trzy oczka, czyli $P(X = Z) = \frac{1}{3}$ oraz analogicznie $P(X = P) = \frac{2}{3}$. Ujmijmy nasze spostrzeżenia w definicji

Definicja 3 *Niech Ω będzie skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych oraz p funkcją prawdopodobieństwa na tym zbiorze. Funkcję $X : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy* *zmienną losową. Z funkcją prawdopodobieństwa p łączymy pewną inną funkcję P, która jest funkcją prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ w następujący sposób $P(X = a) = p\left(X^{-1}(a)\right)$, gdzie $X^{-1}(a)$ oznacza przeciw obraz zbioru jednoelementowego złożonego z elementu a. Funkcję P nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X.*

Przykład 2 *Rozważmy teraz w tym samym modelu co w poprzednim przykładzie przypadek gdy $Z_1 = 5, P_{(1)} = -5$ oraz przypadek gdy $Z_2 = 500, P_{(2)} = -500$ wówczas sprawiedliwa cena za oba instrumenty wynosi 0 jednak intuicyjnie rzecz ujmując możemy więcej stracić (również zyska) wybierając drugi przypadek.*

Postarajmy się bardziej systematycznie podejść do powyższego przykładu wprowadzając definicję

Definicja 4 *Niech X będzie zmienną losową przyjmującą skończoną bądź przeliczalną ilość wartości $(x_1, x_2, ...)$ o danym rozkładzie P. Wartością oczekiwaną zmiennej X nazwiemy liczbę*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k * p_k$$

Uwaga 1 *Czytelnik zechce sprawdzić, że uczciwa cena instrumentu finansowego jest istotnie równa wartości oczekiwanej pewnej zmiennej losowej oraz zinterpretować drugi z przytoczonych przykładów kontekście wartości oczekiwanej zmiennej losowej $(X - E(X))^2$ w obu przypadkach i porównać wyniki.*

2 Prawdopodobieństwo geometryczne

W poprzedniej sekcji rozważaliśmy prawdopodobieństwa na przeliczalnych bądź skończonych zbiorach. Niektóre zastosowania probabilistyki wymagają rozważania funkcji prawdopodobieństwa na nieprzeliczalnych zbiorach zdarzeń elementarnych. Czytelnik może się z łatwością przekonać, że nie można w sposób identyczny jak w poprzedniej sekcji zdefiniować prawdopodobieństwa na nieprzeliczalnych zbiorach. Aparat matematyczny potrzebny do podania prawidłowych definicji wykracza poza ramy tych notatek więc intuicję potrzebna do tego zilustrujemy na przykładzie.

Przykład 3 *W większości kalkulatorów dostępna jest funkcja pozwalająca na losowe wybieranie liczby z przedziału $[0, 1]$ jeśli postępować będziemy zgodnie ze schematem z poprzedniego paragrafu to staniemy przed problemem policzenia wszystkich liczb w tym przedziale. Zgodnie z teorią mnogości jest to niestety zadanie niewykonalne, gdyż przedział ten nie jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych. Możemy jednak postąpić w następujący sposób: Weźmy* *przedział* $[0, /frac12]$ *rozumiemy, że prawdopodobieństwo, że wybrana przez kalkulator liczba będzie w tym przedziale wynosi* $\frac{1}{2}$*, idąc dalej prawdopodobieństwo, że wybrana przez kalkulator liczba będzie przedziale* $[0, \frac{1}{4}]$ *wynosi* $\frac{1}{4}$ *i ogólniej prawdopodobieństwo, że wybrana przez kalkulator liczba będzie przedziale* $[0, \frac{1}{2^n}]$ *wynosi* $\frac{1}{2^n}$ *jeżeli uznamy ciąg takich oraz krótszych przedziałów za pewien podzbiór zbioru zdarzeń za pomocą których określać będziemy prawdopodobieństwa dla wszystkich innych podprzedziałów przedziału* $[0, 1]$ *to zauważymy z łatwością, że prawdopodobieństwo dowolnego podprzedziału równe jest jego długości.*

Uogólniając spostrzeżenie z poprzedniego przykładu wprowadźmy definicję prawdopodobieństwa geometrycznego.

Definicja 5 *Niech* Ω *będzie pewnym podzbiorem prostej lub płaszczyzny o skończonej długości lub objętości oraz niech* A *będzie dowolnym podzbiorem zbioru* Ω*. Wówczas prawdopodobieństwem geometrycznym zbioru a nazywamy stosunek objętości (bądź długości) do objętości (bądź długości) zbioru* Ω*, czyli jeśli oznaczymy przez* λ *funkcję przypisującą długość podzbiorom prostej oraz objętość w przypadku podzbiorów płaszczyzny to mamy zależność:*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$