

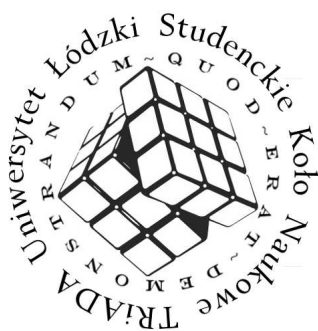
SKN TRIADA  
UNIwersYTET ŁÓDZKI  
Wydział Matematyki i Informatyki

---

KONKURS Z ZASTOSOWAŃ MATEMATYKI -  
FINANSE, LOGISTYKA, UBEZPIECZENIA

---

ETAP I

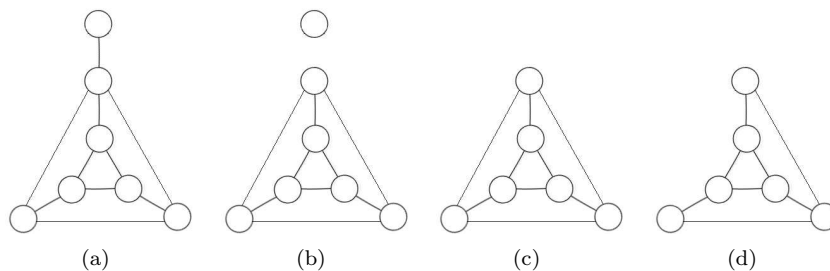


Łódź, 2009

1. Definicja 1

Graf nazywamy hamiltonowskim jeśli da się znaleźć w nim drogę zamkniętą (zaczynającą i kończącą się w tym samym wierzchołku) przechodzącą przez każdy wierzchołek dokładnie jeden raz za wyjątkiem pierwszego (ostatniego). Gdzie przez drogę rozumiemy ciąg krawędzi.

Znając powyższą definicję wskaż grafy hamiltonowskie: Odpowiedź:



- A. (a) i (c)
- B. (b) i (d)
- C. (a) i (b)
- D. (c) i (d)
- E. Żaden

2. Które z poniższych wyrażeń dla dokładnie jednej liczby  $n \in \mathbb{N}/\{0\}$  jest liczbą pierwszą?

- (i)  $2n^4 - 4n^2$ ,
- (ii)  $4n^4 + 1$ ,
- (iii)  $n^2 - n$ .

Odpowiedź:

- A. (i)
- B. (ii)
- C. (iii)
- D. (ii) i (iii)
- E. Żadne

3. Suma współczynników funkcji wielomianowej

$$W(x) = (5 - 4x)^{2009} \cdot (7x^2 - 3x - 3)^{2009}$$

- (i) jest względnie pierwsza z liczbą 113,
- (ii) jest pierwiastkiem funkcji wielomianowej
 
$$f(x) = -x^5 + x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 8x - 8,$$
- (iii) jest równe wartości wyrażenia  $\sin^4 x - \cos^4 x + 2 \cos^2 x$ .

Odpowiedź:

- A. (i) i (ii)
  - B. (i) i (iii)
  - C. (ii) i (iii)
  - D. Żadne
  - E. Wszystkie
4. Rozważmy dwuosobową grę w pokera talią składającą się z pięćdziesięciu dwóch kart. Najpierw pierwszy z graczy dostaje pięć kart :2 pik, 3 karo, 4 trefl, 5 pik oraz as karo, następnie drugi z graczy dostaje pięć kart (nie wiemy jakich). Następnie każdy może wymienić maksymalnie cztery karty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pierwszy gracz odrzucając asa dobierze kartę do strita (wymienia karty jako pierwszy)? Podaj najbliższą odpowiedź:
- A. 4%
  - B. 5%
  - C. 6%
  - D. 7%
  - E. 8%
5. Trzy osoby biorą z banku kredyty w wysokości 100 000 każdy, spłacane za pomocą rat płatnych na koniec każdego roku. Każda z osób ma inny plan spłaty kredytu. Osoba pierwsza spłaca kredyt za pomocą rat postaci:  $X$ ,  $X - 400$ ,  $X - 800$ ,  $\dots$ ,  $X - 2000$ . Osoba druga spłaca kredyt za pomocą rat postaci:  $Y$ ,  $4Y$ ,  $8Y$ ,  $\dots$ ,  $24Y$ . Osoba trzecia spłaca kredyt za pomocą rat postaci:  $Z$ ,  $1.2Z$ ,  $(1.2)^2 Z$ ,  $\dots$ ,  $(1.2)^{20} Z$ . Ile wynoszą sumaryczne odsetki zapłacone przez wszystkich trzech kredytobiorców w całym okresie spłacania kredytów jeśli obowiązuje roczna efektywna stopa procentowa  $i = 20\%$  (podaj najbliższą wartość)?
- A. 1414114
  - B. 1415114
  - C. 1416114

- D. 1417114  
E. 1418114
6. Pan Iksiński zamierza za dwa lata nabyć samochód, wart obecnie 30 tysięcy złotych. Będzie w tym celu odkładać na początku każdego miesiąca pewną sumę do banku, w którym obowiązuje miesięczna kapitalizacja odsetek przy rocznej nominalnej stopie procentowej 12%. Ponadto wiadomo, że wartość samochodu spada rocznie o 13,5%. Jaka miesięczną kwotę musi odkładać pan Iksiński? Podaj najbliższą odpowiedź:
- A. 824  
B. 844  
C. 864  
D. 884  
E. 904
7. W pewnym banku obowiązuje kapitalizacja kwartalna przy rocznej stopie nominalnej  $i$ . Wyznacz  $i$  jeśli wiadomo, że wpłacony kapitał po 5,5 roku podwaja się. Podaj najbliższą odpowiedź:
- A. 12,0%  
B. 12,2%  
C. 12,4%  
D. 12,6%  
E. 12,8%
8. Bieżące kursy walutowe wynoszą  $1\text{USD} = 2.8\text{PLN}$ ,  $1\text{USD} = 0.67\text{EUR}$ . Oprocentowanie rocznych depozytów i kredytów jest następujące:

	PLN	EUR	USD
kredyt	8%	5%	3%
depozyt	5%	4%	1%

Inwestor może dokonywać dowolnych operacji według wyżej określonych stawek rynkowych. Przy którym z poniższych kursów terminowych z rozliczeniem za rok jest możliwy arbitraż?

- A.  $1\text{USD} = 2.86\text{PLN}$   
B.  $1\text{EUR} = 4.20\text{PLN}$   
C.  $1\text{USD} = 0,65\text{EUR}$   
D.  $1\text{PLN} = 0,35\text{USD}$

E. Żaden przypadek nie jest prawdziwy

Arbitrażem nazywamy stan rynku, w którym możliwe jest osiągnięcie zysku bez ponoszenia jakiegokolwiek ryzyka. W wyżej opisanym przypadku arbitrażem jest sytuacja gdy inwestor nie posiadający żadnego kapitału własnego może - dokonując kupna/sprzedaży walut - wzbogacić się.

W zadaniu nie uwzględniamy żadnych opłat transakcyjnych ani podatku od zysku. Wszystkie obliczenia należy wykonać z dokładnością do drugiego miejsca po przecinku.

9. Pan Igrkowski chce przez 20 lat otrzymywać wypłaty w wysokości kolejno 1 na koniec pierwszego roku, 11 na koniec drugiego roku, 111 na koniec trzeciego roku itd. Jaką jednorazową kwotę musi teraz wpłacić na lokatę aby wystarczyło na wszystkie wypłaty? Bank stosuje kapitalizację roczną przy rocznej stopie procentowej 9% (wyznaczona wielkość jest to tak zwana wartość bieżąca ciągu płatności). Podaj najbliższą odpowiedź:

A.  $5.27 \cdot 10^8$

B.  $5.37 \cdot 10^8$

C.  $5.47 \cdot 10^8$

D.  $5.57 \cdot 10^8$

E. Żadna odpowiedź nie jest prawdziwa

10. Jeżeli prawdziwe są równości:  $\frac{1-v^n}{d} = a$ ,  $\frac{(1+i)^n - 1}{d} = b$ , gdzie  $n \in \mathbb{N}$  oraz wiedząc, że  $v = \frac{1}{1+i}$ ,  $i \in (0, 1)$  wyznacz wartość  $d$ .

A.  $\frac{a-b}{2a+2b+ab}$

B.  $\frac{a-b}{a-b+ab}$

C.  $\frac{b-a}{a+b+ab}$

D.  $\frac{b-a}{ab}$

E. Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna

11. Pan Kowalski ulokował 15000 PLN w akcjach amerykańskich. Kupił je gdy kurs wynosił 1 USD = 3,20 PLN. Po pierwszym roku stracił 5% kwoty, po drugim zyskał 12%, po trzecim stracił 1%. Następnie sprzedał akcje po kursie 1 USD = 3,125 PLN. I ostatecznie po trzech latach operacji zapłacił podatek od zysku w wysokości 19%. Jaki kapitał zgromadził po 3 latach? Podaj najbliższą odpowiedź:

A. 11341.67 PLN

- B. 12341.67 PLN
- C. 13348.33 PLN
- D. 14348.33 PLN
- E. 15348,36 PLN

12. Na rachunku bankowym, na którym stosowana jest kapitalizacja prosta, zostały dokonane następujące operacje:

- (i) wpłata 920 PLN w dniu 01.02.2009r.
- (ii) wpłata 530 PLN w dniu 15.03.2009r.
- (iii) wypłata 700 PLN w dniu 01.04.2009r.

Jaki jest stan konta na koniec dnia 30.06.2009, przy rocznej (360 dni) stopie procentowej 4%? Wskaż najbliższą odpowiedź.

- A. 761 PLN
- B. 763 PLN
- C. 765 PLN
- D. 767 PLN
- E. Żadna z odpowiedzi nie jest poprawna

Przyjmujemy, że zarówno wpłaty jak i wypłaty dokonywane są na początku dnia.

13. Pan Iksiński chce włożyć 10000 PLN na 3-miesięczną lokatę bankową. Bank zaproponował mu do wyboru dwie lokaty. Pierwsza jest to zwykła lokata 3-miesięczna z oprocentowaniem nominalnym 6,6% w skali roku i kapitalizacją kwartalną. Druga lokata jest również 3-miesięczna, ale obowiązuje kapitalizacja jednodniowa, oprocentowanie nominalne w skali roku wynosi 5,5%. Zysk opodatkowany jest wyłącznie na pierwszej lokacie (20%). O ile więcej będzie miał Pan Iksiński po trzech miesiącach (każdy miesiąc ma 30 dni) jeżeli wpłaci pieniądze na drugą lokatę? Wskaż najbliższą wartość:

- A. 5.12 PLN
- B. 6.44 PLN
- C. 9.80 PLN
- D. 13.00 PLN
- E. 19.73 PLN

14. Ile wynosi prawdopodobieństwo trafienia 7 liczb w grze Multilotek<sup>1</sup>? Podaj najbliższą odpowiedź:
- A.  $1,2 \cdot 10^{-3}$
  - B.  $1,4 \cdot 10^{-3}$
  - C.  $1,6 \cdot 10^{-3}$
  - D.  $1,8 \cdot 10^{-3}$
  - E.  $2 \cdot 10^{-3}$
15. Definicja 2  
Grafem pełnym nazywamy graf, w którym każdy z wierzchołków jest połączony krawędzią z pozostałymi wierzchołkami.  
Ile jest różnych cykli hamiltona, w których przynajmniej jedna krawędź jest różna, w grafie pełnym o dziewięciu wierzchołkach?
- A. 10960
  - B. 20160
  - C. 20360
  - D. 20560
  - E. 20760
16. Rzucamy symetryczną monetą do momentu wyrzucenia dwukrotnie pod rząd orła lub reszki. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ostatni rzut będzie nieparzysty?
- A.  $\frac{1}{2}$
  - B.  $\frac{1}{3}$
  - C.  $\frac{1}{4}$
  - D.  $\frac{1}{5}$
  - E. Żadna z powyższych
17. Mamy 6 ludzi i 6 prezentów. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden z nich nie dostanie swojego prezentu? Podaj najbliższą odpowiedź:
- A. 0,318
  - B. 0,338
  - C. 0,358
  - D. 0,368

---

<sup>1</sup>W grze Multilotek zakreślamy na kuponie 10 liczb spośród 80. Podczas losowania wybierane jest 20 liczb z 80.

E. 0,378

18. Producent mebli chce określić ile stołów i krzeseł powinien produkować aby optymalnie wykorzystać dostępne środki. Do produkcji wykorzystuje się dwa typy desek. Wytwórca posiada 450 metry pierwszego typu desek i 600 metrów drugiego. Dysponuje kapitałem 192h roboczych na wykonanie całej pracy. Przewidywane zapotrzebowanie plus potwierdzone zamówienie wymagają wykonania co najmniej 15 stołów i nie więcej niż 45 krzeseł. Każdy stół, krzesło wymaga odpowiednio 9,45 metrów desek pierwszego typu i 30,3 metrów desek drugiego typu. Na wykonanie stołu potrzebne jest 6h pracy a krzesła 3h. Przy sprzedaży jednego stołu producent osiąga zysk odpowiednio 120 euro a krzesła 30 euro. Podaj ile poszczególnych mebli musi wykonać producent aby zmaksymalizować swój zysk. Najbliższa odpowiedź to:

- A. 36.17% produkcji muszą stanowić stoły
- B. 36.17% produkcji muszą stanowić krzesła
- C. 46.17% produkcji muszą stanowić stoły
- D. 46.17% produkcji muszą stanowić krzesła
- E. Żadna odpowiedź nie jest poprawna