SKN TRiADA
UNIWERSYTET ŁÓDZKI
Wydział Matematyki i Informatyki

Konkurs z zastosowań matematyki - finanse, logistyka, ubezpieczenia

Etap II

Łódź, 2009

1. Kredytobiorca zaciągnął dług w wysokości $L = 2 \cdot 10^5$, który będzie spłacał na koniec każdego roku przez n lat. Każda rata równa się $\frac{L}{n}$ plus odsetki narosłe w poprzednim okresie. (Czyli k-ta rata wynosi $\frac{L}{n} + (L - (k-1) \cdot \frac{L}{n}) \cdot i$, gdzie i jest stopą procentową, dla $k = 1, 2, \ldots, n$). Tak więc każdą ratę możemy podzielić na:

   (a) ratę kapitałową (w tym przypadku równą $\frac{L}{n}$),

   (b) ratę odsetkową będącą pozostałością różnicy raty i raty kapitałowej.

   Wyznacz przy jakim najmniejszym n suma odsetek (czyli suma rat odsetkowych) będzie większa od trój krotności kredytu jeśli $i = 10\%$. Odpowiedź:

   A. 17

   B. 18

   C. 19

   D. 20

   E. 21

   Uwaga: Opisany powyżej plan spłaty długu, nazywany jest spłatami o równych ratach kapitałowych.

2. O pewnych zdarzeniach A, B, C wiemy, że:

$$P(A|B \cap C) = 0.4, \quad P(B|A \cap C) = 0.5, \quad P(C|A \cap B) = 0.8$$

   Oblicz $K := P\left(A \cap B \cap C | (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)\right)$.

   A. $\frac{4}{15}$

   B. $\frac{4}{19}$

   C. $\frac{4}{23}$

   D. Dane są sprzeczne

   E. Brak prawidłowej odpowiedzi

3. Niech $(Ia)_{\overline{n}|i}$ oznacza wartość bieżącą[1] ciągu płatności o płatnościach dokonywanych na koniec każdego roku przez n lat w wysokości:

$$R_n = n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}$$

   Wyznacz

$$\lim_{n \to +\infty} (Ia)_{\overline{n}|i}$$

   jeśli $i = 10\%$. Odpowiedź:

[1] patrz zadanie 9 z etapu 1

A. 110

B. 120

C. 130

D. 140

E. 150

4. Pan Iksiński zaciągnął w banku kredyt w wysokości L. Może spłacić go spłacić w jeden z następujących sposobów:
Pierwszy plan spłaty długu. Przez 30 lat na końcu każdego roku ma płacić składki skalkulowane przy efektywnej rocznej stopie oprocentowania $i = 10\%$. W k-tym roku płaci $R_k^{(1)}$, które spełniają warunki:

$$\begin{cases} R_1^{(1)} = R \\ R_k^{(1)} = R_{k-1}^{(1)} + 3 \cdot R^{(1)} \qquad \text{dla } k \in \{2, 3, \ldots, 30\} \end{cases}$$

Drugi plan spłaty długu. Przez 15 lat na końcu każdego roku ma płacić składki skalkulowane przy efektywnej rocznej stopie oprocentowania $j = 5\%$. W k-tym roku płaci $R_k^{(2)}$, które spełniają warunki:

$$\begin{cases} R_1^{(2)} = R \\ R_k^{(2)} = R_{k-1}^{(2)} - R^{(2)} \qquad \text{dla } k \in \{2, 3, \ldots, 15\} \end{cases}$$

Pan Igrekowski, który zaciągnął w banku kredyt w wysokości $2 \cdot 10^5$, który będzie spłacał przez 40 lat na końcu każdego roku za pomocą składki $R^{(3)} := R + 20 \cdot R^{(1)} + 20 \cdot R^{(2)}$ skalkulowaną przy stopie procentowej $k = 15\%$. Wyznacz L, jeśli wiadomo ponadto, że zachodzi równość:

$$4 \cdot R_{10}^{(1)} + 2 \cdot R_3^{(1)} - 80 \cdot R^{(1)} = R_5^{(2)} + 6 \cdot R_{10}^{(2)} + 98 \cdot R^{(2)}$$

Odpowiedź (podaj najbliższą wartość):

A. 245000

B. 250000

C. 255000

D. 260000

E. 265000

5. Aby towarzystwo ubezpieczeń mogło funkcjonować, musi mieć kapitał nie mniejszy niż 1 000 000 złotych. W wyniku sprzedaży polisy występuje strata 200 złotych w momencie wystawienia polisy oraz zysk na początku każdego następnego roku w wysokości 40. Na podstawie tych informacji

wyznacz minimalną kwotę kapitału towarzystwa ubezpieczeń (kapitału zakładowego) aby mogło ono funkcjonować, jeśli planowana sprzedaż roczna polis wynosi 1000 oraz stopa procentowa wynosi $i = 10\%$. Wskaż najbliższą odpowiedź:

A. 1104500

B. 1104600

C. 1104700

D. 1104800

E. 1104900

6. Kredytobiorca może zaciągnąć kredyt w wysokości $L = 2 \cdot 10^5$ w banku A lub banku B. W obu przypadkach będzie spłacał dług przez 10 lat, jednak w banku A będą to równe raty w każdym roku, a w banku B będzie to spłata o równych ratach kapitałowych. Niech I_A, I_B będą sumami odsetek odpowiednio przy spłatach w banku A i B. Ile wynosi $|I_A - I_B|$ jeśli $i = 10\%$? Podaj najbliższą odpowiedź:

   A. 65500

   B. 65510

   C. 65520

   D. 65530

   E. 65540

   Uwaga. Rozpatrzmy kredyt L oprocentowany stopą i, spłacany na koniec każdego roku zupełnie dowolnymi ratami R_t, gdzie $t \in \{1, 2, \dots, n\}$. Spłacając ratę na koniec k-tego roku opłacamy całe odsetki narosłe w tym roku. Tą część R_t, która równa się tym odsetkom nazywamy ratą odsetkową, natomiast resztę z różnicy raty R_t i raty odsetkowej, ratą kapitałową.

7. Pan Iksiński zaciągnął kredyt w wysokości L, który będzie spłacał równymi ratami na koniec każdego roku przez 20 lat. Ponadto wiadomo, że:

   (a) odsetki w drugiej racie wynoszą $145,92$,

   (b) kapitał spłacony w przed ostatniej racie wynosi $193,98$.

   (c) stopa procentowa jest z przedziału $[5, 7\%]$

   Na podstawie tych danych podaj jaki był koszt kredytu (suma odsetek). Wskaż najbliższą odpowiedź:

   A. 1860

B. 1960

C. 2060

D. 2160

E. 2260

Wskazówka. W celu obliczenia przybliżonego pierwiastka z jakiegoś przedziału $[a, b]$ wielomianu dowolnego stopnia $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, gdzie $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ są pewnymi liczbami rzeczywistymi można skorzystać z aproksymacji Newtona. W tym celu ustala się dowolną liczbę $x_0 \in [a, b]$ i następnie stosuje wzór rekurencyjny:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Powyższy algorytm należy zakończyć gdy $|x_{k+1} - x_k| < 0,0001$. W ten sposób określona liczba x_{k+1} jest przybliżoną wartością pierwiastka wielomianu w przedziale $[a, b]$.

8. Pan Iksiński zawarł z Bankiem Grosik następującą umowę długoterminowego oszczędzania na okres 30 lat:

   (a) na początku każdego roku będzie wpłacał 1000zł

   (b) obowiązuje minimalna stopa procentowa od wpłat podstawowych $i = 5\%$ od momentu dokonania wypłaty do końca okresu umowy,

   (c) w przypadku uzyskania większego zysku niż 5%, nadwyżka ponad 5% jest zawsze oprocentowana niższą stopą $j = 3\%$ do końca okresu umowy,

   (d) po trzydziestu latach zgromadzone pieniądze są wypłacane.

   Podaj minimalną wartość otrzymanych pieniędzy po 30 latach, jeśli wiadomo że przez pierwsze 7 lat oprocentowanie od wpłat wynosiło 9%. Wskaż najbliższą wartość:

   A. 93210

   B. 93220

   C. 93230

   D. 93240

   E. 93250

9. Pewne towarzystwo ubezpieczeniowe postanowiło przetransferować część ryzyka związanego z wystąpieniem trzęsienia ziemi w pewnym regionie.

W tym celu wyemitowało tak zwaną obligację katastroficzną (*ang. catastrophe bond*). Jest to instrument finansowy, który można nabyć, za cenę P, wypłacający po 10 latach:

(a) 100 jeśli nie wystąpiło żadne trzęsienie ziemi,

(b) 90 jeśli wystąpiło jedno trzęsienie ziemi,

(c) 80 jeśli wystąpiły dwa trzęsienia ziemi,

(d) $100 - k\cdot 10$ jeśli wystąpiło $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ trzęsień ziemi,

(e) 0 jeśli wystąpiło więcej niż 10 trzęsień ziemi.

Wiadomo, że trzęsienie ziemi występuje w danym roku z prawdopodobieństwem $p = 0,2$ i jest takie samo w kazdym roku niezależnie od tego czy w poprzednich latach wystąpiło trzęsienie czy nie (może wystąpić tylko raz w danym roku). Niech X oznacza zmienną losową opisującą wysokość wypłaty po 10 latach. Oblicz $P(X \leqslant 40)$. Podaj najbliższą wartość. Odpowiedź:

A. $0,00539$

B. $0,00639$

C. $0,00739$

D. $0,00839$

E. $0,00939$

10. Prawdopodobieństwo, że kierowca ulegnie wypadkowi w danym roku wynosi $p \in (0, 1)$ i jest takie samo w każdym roku niezależnie czy w poprzednich latach kierowca uległ wypadkowi czy nie. Kierowca zawarł następująca umowę na ubezpieczenie OC, obowiązującą przez 5 lat:

(a) W pierwszym roku płaci składkę M_1

(b) W n-tym roku płaci składkę $M_n = M_{n-1}\cdot 0,9$ jeśli nie ulegnie wypadkowi, $M_n = \min\{M_{n-1}\cdot 1,25, M_1\}$ jeśli uległ wypadkowi.

Niech X będzie zmienną losową opisującą wysokość składki w czwartym roku. Wyznacz $\mathbb{E}X$, jeśli $M_1 = 10$ oraz $p = 0,3$. Odpowiedź:

A. $3,6$

B. $6,6$

C. $7,6$

D. $8,6$

E. $9,6$

11. Jak powszechnie wiadomo drożdże rozmnażają się przez podział. Populacja drożdży zaczyna się od jednego osobnika. Każdy osobnik może podzielić się tworząc dwa osobniki z prawdopodobieństwem p oraz obumrzeć z prawdopodobieństwem $1-p$. Jakie powinna być wartość p aby prawdopodobieństwo, że populacja drożdży nigdy nie wymrze było większe od zera? Podaj największy możliwy przedział.

    A. $p = 1$

    B. $p \in (\frac{1}{4}, 1]$

    C. $p \in [\frac{1}{4}, 1]$

    D. $p \in (\frac{1}{2}, 1]$

    E. $p \in [\frac{1}{2}, 1]$

12. Wybieramy w sposób losowy i niezależny od siebie dwa punkty na odcinku o długości 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że z powstałych odcinków da się skonstruować trójkąt?

    A. $\frac{1}{8}$

    B. $\frac{1}{6}$

    C. $\frac{1}{4}$

    D. Zawsze można zbudować trójkąt

    E. Brak prawidłowej odpowiedzi

13. Dwie koleżanki umówiły się na spotkanie o 16:30 obie przychodzą na miejsce spotkania w losowej chwili pomiędzy 16:00 a 16:20.Jaka jest szansa, że każda z nich nie będzie czekać na drugą dłużej niż 5 minut?

    A. $\frac{7}{16}$

    B. $\frac{7}{32}$

    C. $\frac{9}{16}$

    D. $\frac{25}{32}$

    E. Brak prawidłowej odpowiedzi

14. Wybieramy trzy punkty na okręgu o promieniu 1. Jakie jest prawdopodobieństwo, że trójkąt utworzony z połączenia tych punktów jest ostrokątny?

    A. $\frac{1}{16}$

    B. $\frac{3}{16}$

    C. $\frac{5}{32}$

    D. $\frac{7}{32}$

E. Brak prawidłowej odpowiedzi

15. Losujemy bez zwracania trzy cyfry ze zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowana przez nas liczba trzycyfrowa jest podzielna przez 3?

A. $\frac{3!}{4!}$

B. $\frac{4!}{3! \cdot \binom{4}{3}}$

C. $\frac{3 \cdot 4!}{4! \binom{4}{3}}$

D. $\frac{2 \cdot 3!}{3! \binom{4}{3}}$

E. Brak prawidłowej odpowiedzi